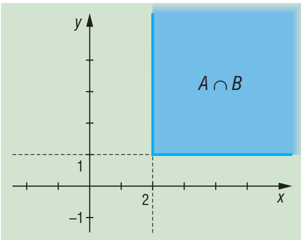
9.3. FÜGGVÉNYEK

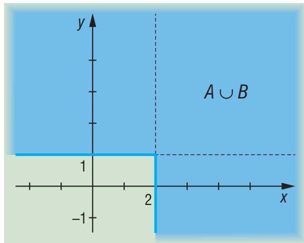
A derékszögű koordináta-rendszer, ponthalmazok – megoldások

1194 $f(-1) = 12$; $f(0) = 6$; $f(1) = 2$; $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = 2$.

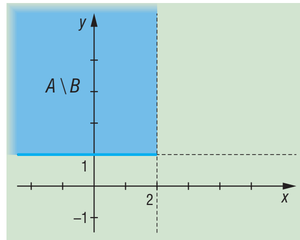
1195 *a)*



b)

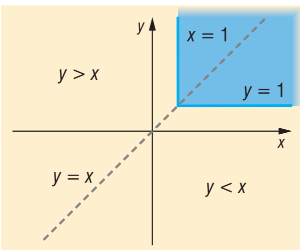


c)

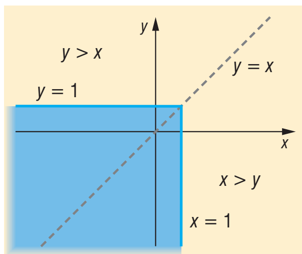


1196 $f(-1) = -24$; $f(0) = -6$; $f(1) = 0$; $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = 6$.

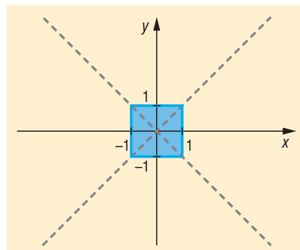
1197 *a)*



b)

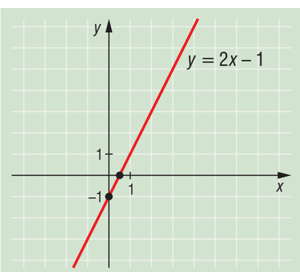


c)

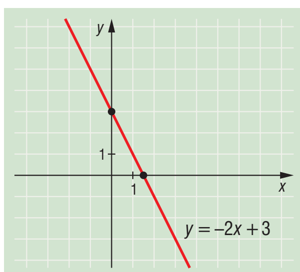


Lineáris függvények – megoldások

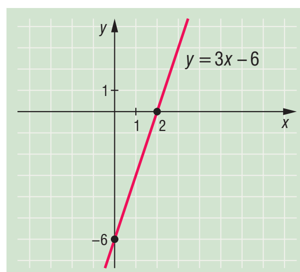
1198 *a)*



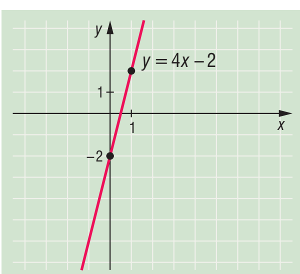
b)



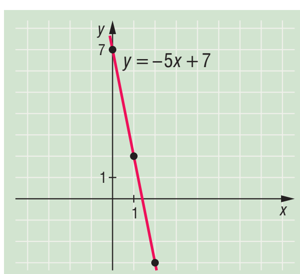
c)



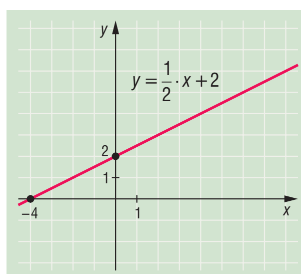
d)



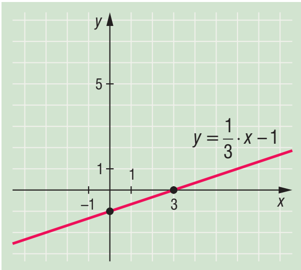
e)



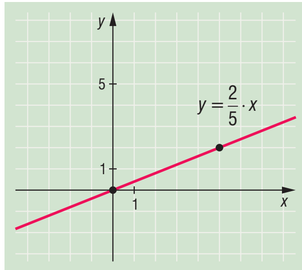
f)



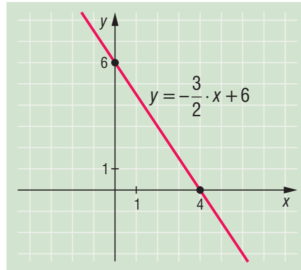
g)



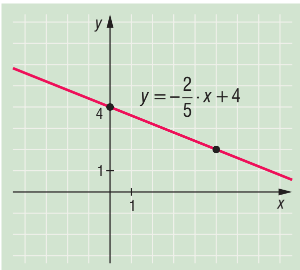
h)



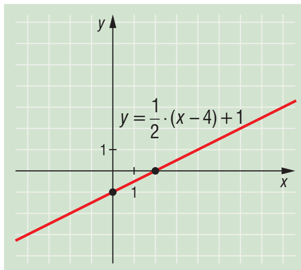
i)



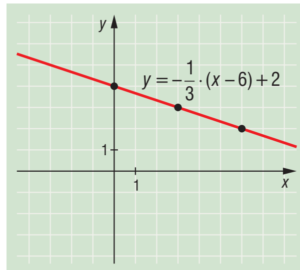
j)



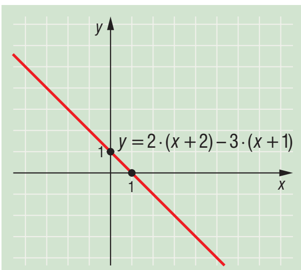
k)



l)



m)



1199 *a)* $x \mapsto x-4$; *b)* $x \mapsto -x+2$; *c)* $x \mapsto 2x-3$;

d) $x \mapsto 4x-4$; *e)* $x \mapsto -3x+5$; *f)* $x \mapsto \frac{1}{2}\cdot x-1$;

g) $x \mapsto 3$; *h)* $x \mapsto -\frac{2}{3}\cdot x+4$; *i)* $x \mapsto -\frac{5}{2}\cdot x+2$.

1200 *a)* P és R illeszkedik $f(x)$-re, Q nem. *b)* P és Q illeszkedik $g(x)$-re, R nem.

c) R illeszkedik $h(x)$-re, P és Q nem.

1201 Az $f(x)=ax+b$ egyenletbe helyettesítve a két pont koordinátáit, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\left.\begin{aligned}3&=a\cdot 3+b\\0&=a\cdot 2+b\end{aligned}\right\}.$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$3-3a=-2a \quad\Rightarrow\quad a=3 \quad \text{és} \quad b=-6.$$

A keresett hozzárendelési szabály: $x \mapsto 3x-6$, a meredekség: $a=3$.

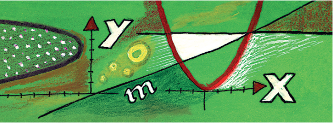
Az x tengelyt $(x; 0)$ pontban metszi, azaz

$$0=3x-6 \quad\Rightarrow\quad x=2.$$

Az y tengelyt $(0; y)$ pontban metszi, azaz

$$y=3\cdot 0-6 \quad\Rightarrow\quad y=-6.$$

A keresett metszéspontok tehát: $(2; 0)$ és $(0; -6)$.



1202 Helyettesítsük be az adott függvényértékeket:

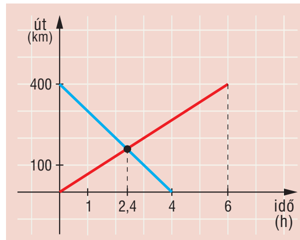
$$\left.\begin{aligned} f(-1) = 2 = a\cdot(-1) + b \quad &\Rightarrow \quad b = 2 + a \\ f(2) = 3 = a\cdot 2 + b \quad &\Rightarrow \quad b = 3 - 2a \end{aligned}\right\}.$$

Egyenletként megoldva:

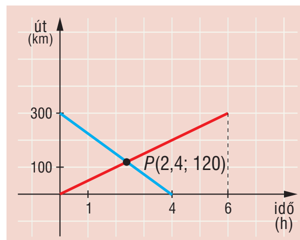
$$2 + a = 3 - 2a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{3} \quad \text{és} \quad b = \frac{7}{3}.$$

Tehát az f függvény képlettel megadva: $f(x) = \frac{1}{3}\cdot x + \frac{7}{3}$.

1203 A két autó 2,4 órával az indulásuk után találkozik.

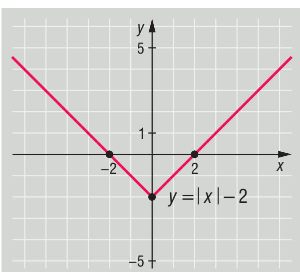


1204 A két jármű A-tól 120 km-re találkozik, indulásuk után 2,4 óra múlva.

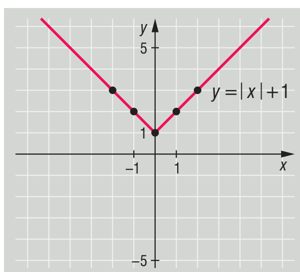


Az abszolútérték-függvény – megoldások

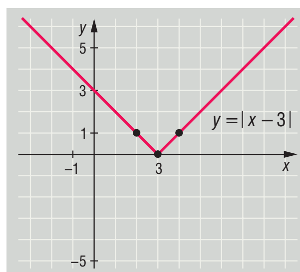
1205 *a)*



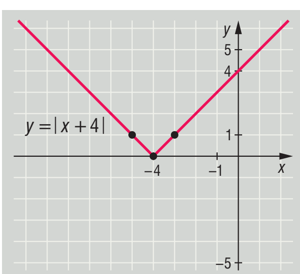
b)



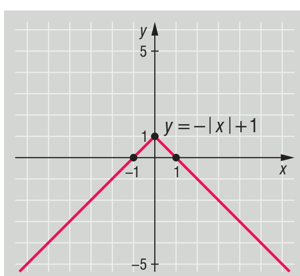
c)



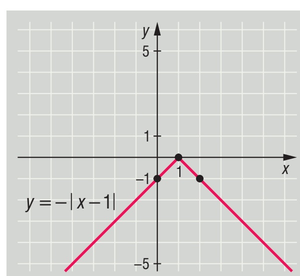
d)



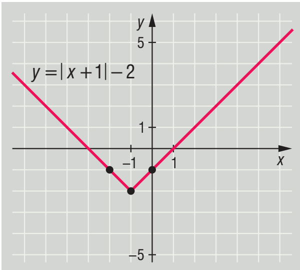
e)



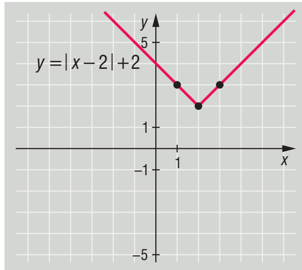
f)



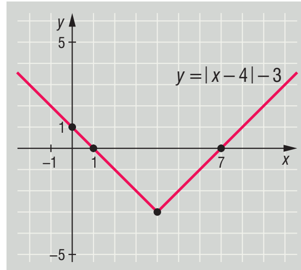
g)



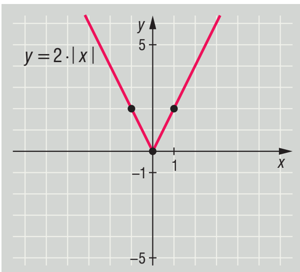
h)



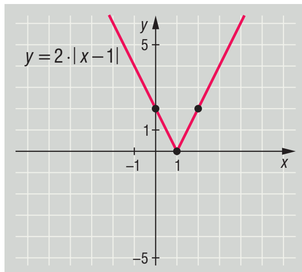
i)



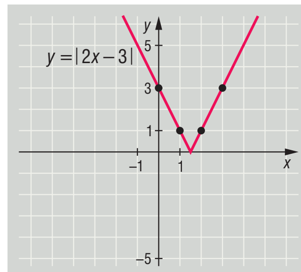
j)



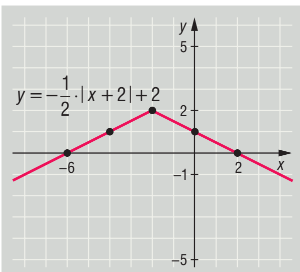
k)



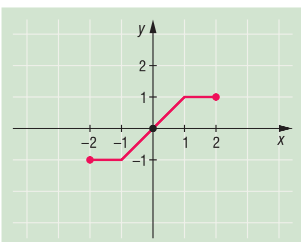
l)



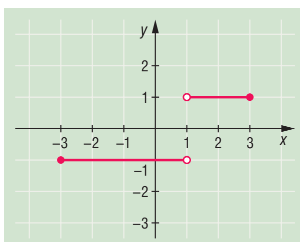
m)



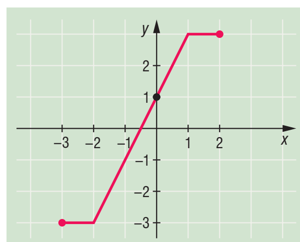
1206 *a)*



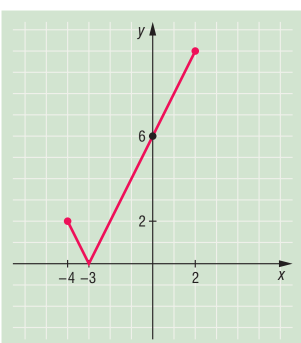
b)



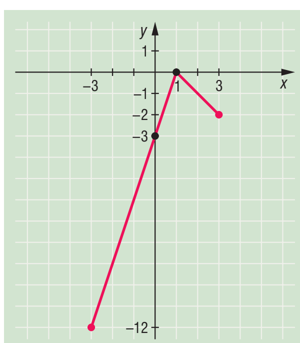
c)



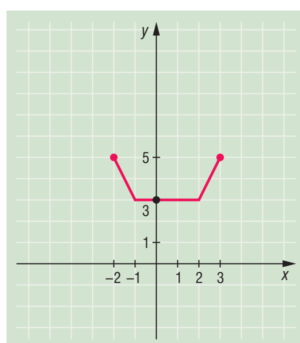
d)

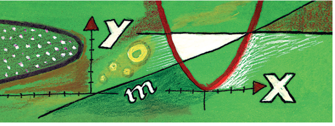


e)



f)





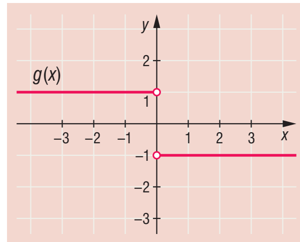
1207 *a)* $x \mapsto |x| - 1$; *b)* $x \mapsto -|x| - 1$; *c)* $x \mapsto |x - 2|$; *d)* $x \mapsto |x + 3|$;
e) $x \mapsto |x + 4| - 2$; *f)* $x \mapsto |x - 3| - 3$; *g)* $x \mapsto -|x + 2| + 4$; *h)* $x \mapsto -|x - 4| + 2$.

1208 Mivel

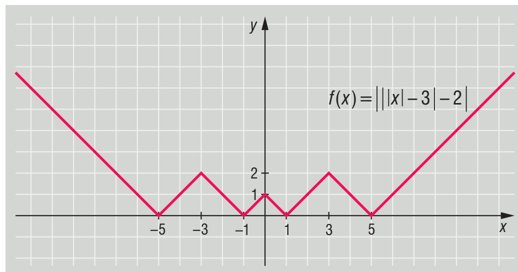
$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha} \quad x \geq 0, \\ -x, & \text{ha} \quad x < 0, \end{cases}$$

ezért

$$g(x) = \frac{-|x|}{x} = \begin{cases} -1, & \text{ha} \quad x > 0, \\ 1, & \text{ha} \quad x < 0. \end{cases}$$



1209 A függvény grafikonja az ábrán látható.

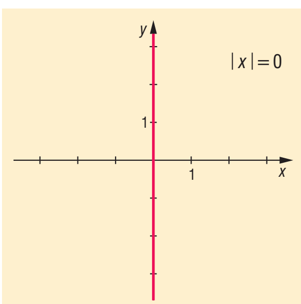


1210 Ha $x = 0$, akkor az egyenlőség igaz.

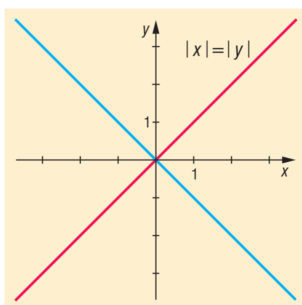
Ha $x > 0$, akkor $|x| = x$, így $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2 + 0 = x^2$, tehát az egyenlőség igaz.

Ha $x < 0$, $|x| = -x$, így $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = 0 + x^2 = x^2$, tehát az egyenlőség igaz.

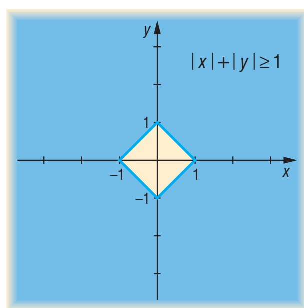
1211 *a)*



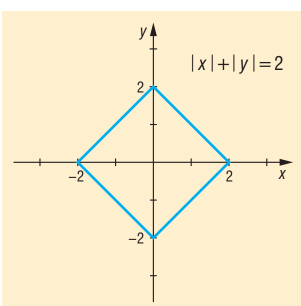
b)

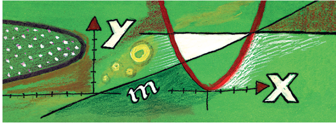


c)

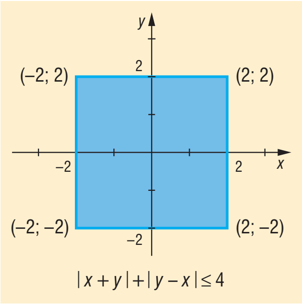


d)

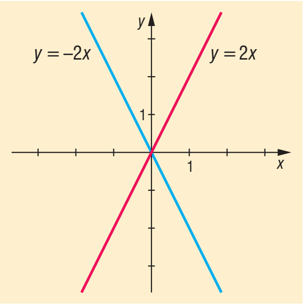




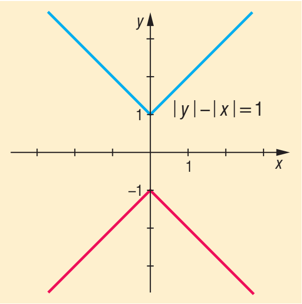
1212 *a)*



b)



c)



A másodfokú függvény – megoldások

1213 *a)* Értékkészlete: $[2; \infty[$.

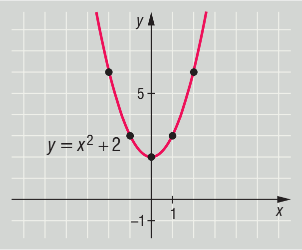
Zérushelye: nincs.

Menete: $]-\infty; 0]$-ban szigorúan monoton csökken;

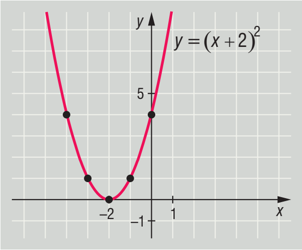
$[0; \infty[$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértéke: minimuma van, helye: $x = 0$, értéke $y = 2$.

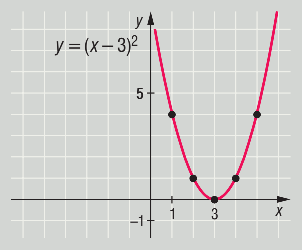
Paritása: páros függvény.



b) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



c) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



d) Értékkészlete: $]-\infty; 4]$.

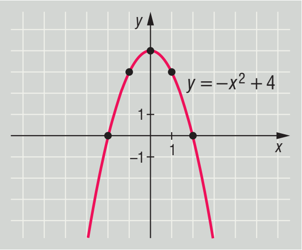
Zérushelyei: $x = -2$ és $x = 2$.

Menete: $]-\infty; 0]$-ban szigorúan monoton nő;

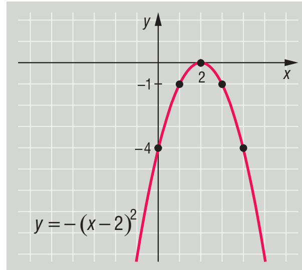
$[0; \infty[$-ban szigorúan monoton csökken.

Szélsőértéke: maximuma van, helye: $x = 0$, értéke $y = 4$.

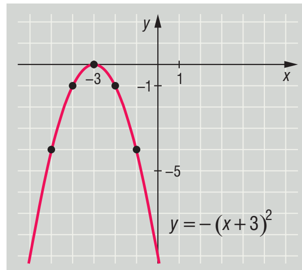
Paritása: páros függvény.



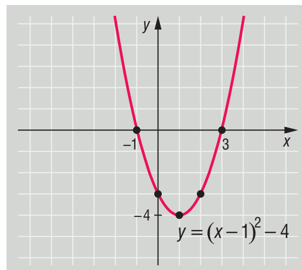
e) Jellemzése a *d)* feladathoz hasonlóan történik.



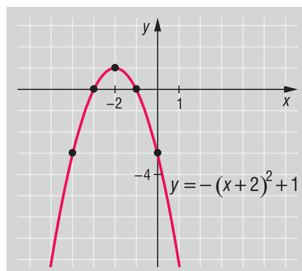
f) Jellemzése a *d)* feladathoz hasonlóan történik.



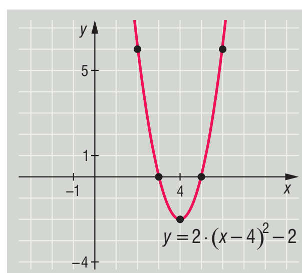
g) Értékkészlete: $[-4; \infty[$.
Zérushelyei: $x = -1$ és $x = 3$.
Menete: $]-\infty; 1]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[1; \infty[$-ban szigorúan monoton nő.
Szélsőértéke: minimuma van, helye: $x = 1$, értéke $y = -4$.
Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.

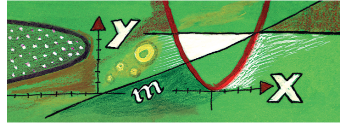


h) Értékkészlete: $]-\infty; 1]$.
Zérushelyei: $x = -3$ és $x = -1$.
Menete: $]-\infty; -2]$-ban szigorúan monoton nő;
$[-2; \infty[$-ban szigorúan monoton csökken.
Szélsőértéke: maximuma van, helye: $x = -2$, értéke $y = 1$.
Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.

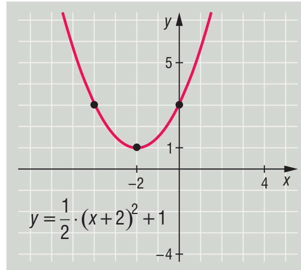


i) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.

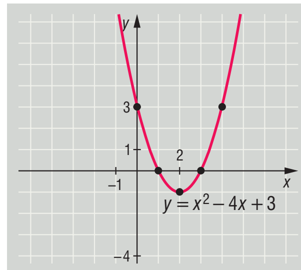




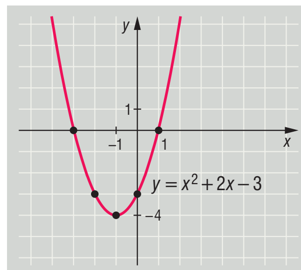
j) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



k) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



l) Jellemzése a *g)* feladathoz hasonlóan történik.



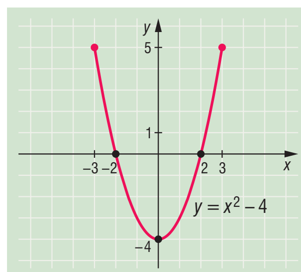
1214 *a)* Értékkészlete: $[-4; 5]$.

Zérushelyei: $x = -2$ és $x = 2$.

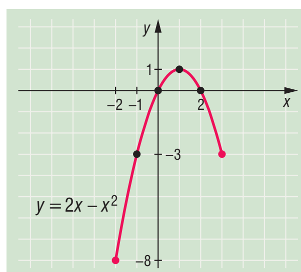
Menete: $[-3; 0]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[0; 3]$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = -4$;
maximumai: $x_1 = -3$ helyen értéke: $y_1 = 5$;
$x_2 = 3$ helyen értéke: $y_2 = 5$.

Paritása: páros függvény.



b) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



c) Értékkészlete: $[0; 12]$.

Zérushelye: $x = 0$.

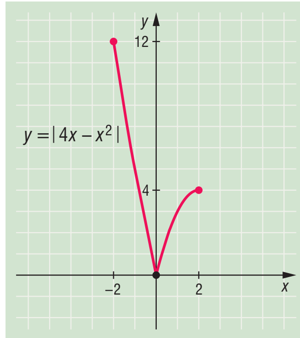
Menete: $[-2; 0]$-ban szigorúan monoton csökken;

$[0; 2]$-ban szigorúan monoton nő.

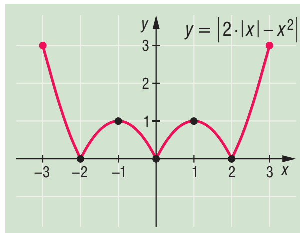
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = 0$;

maximumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 12$.

Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.



d) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



e) Értékkészlete: $[0; 7]$.

Zérushelyei: $x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ és $x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

Menete: $\left[-1; 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$-ban szigorúan monoton csökken;

$\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right[$-ban szigorúan monoton nő;

$\left[1; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right[$-ban szigorúan monoton csökken;

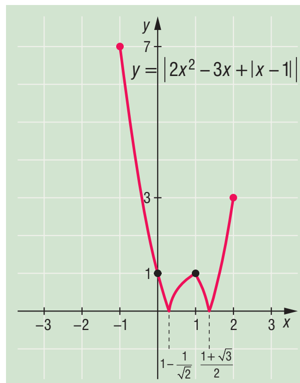
$\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}; 2\right[$-ban szigorúan monoton nő.

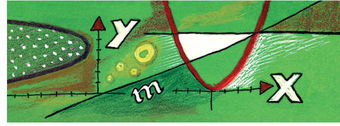
Szélsőértékei: minimumai: $x_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ helyen értéke: $y_1 = 0$;

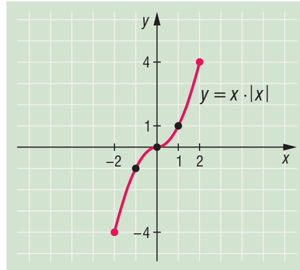
$x_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ helyen értéke $y_2 = 0$;

maximumának helye: $x = -1$, értéke $y = 7$.

Paritása: nem páros és nem páratlan függvény.







f) Mivel

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ha } x \ge 0, \\ -x, & \text{ha } x < 0, \end{cases}$$

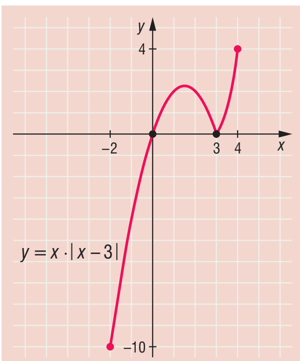
ezért

$$x \mapsto x \cdot |x| = \begin{cases} x^2, & \text{ha } x \ge 0, \\ -x^2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

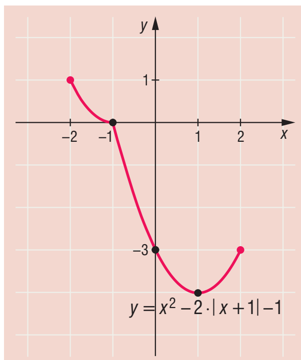
Értékkészlete: $[-4; 4]$.
Zérushelye: $x = 0$.
Menete: $[-2; 2]$-ban szigorúan monoton nő.
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = -2$, értéke: $y = -4$;
maximumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 4$.
Paritása: páratlan függvény.

1215 *a)* $x \mapsto x^2 - 1$; *b)* $x \mapsto -x^2 + 5$; *c)* $x \mapsto (x-4)^2$;
d) $x \mapsto -(x+2)^2$; *e)* $x \mapsto (x+1)^2 - 2$; *f)* $x \mapsto -(x-5)^2 + 3$;
g) $x \mapsto 2 \cdot (x+1)^2 - 5$; *h)* $x \mapsto \frac{1}{3} \cdot (x+2)^2 - 4$; *i)* $x \mapsto -\frac{1}{2} \cdot (x-3)^2 + 2$.

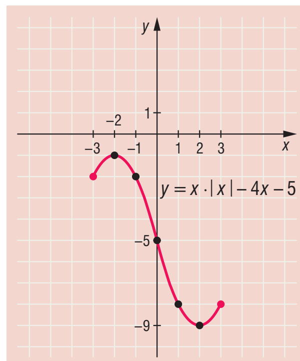
1216 *a)*



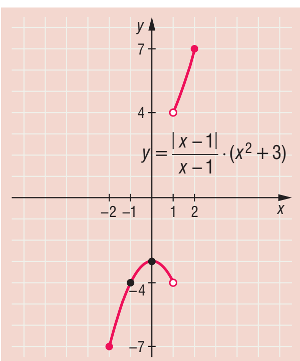
b)



c)

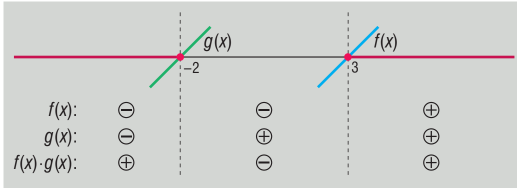


d)



1217 *a)* $x = 3$ és $x = 4$; *b)* $2 < x < 7$; *c)* $-4 < x < -1$ vagy $1 < x < 4$;
d) $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$; *e)* $-1 \le x \le 1$ vagy $x \le -\frac{3}{2}$ vagy $x \ge \frac{3}{2}$.

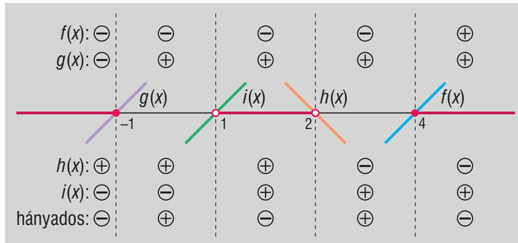
1218 *a)* Az egyenlőtlenség: $(x-3)\cdot(x+2)\ge 0$.



Legyen $f(x)=x-3$ és $g(x)=x+2$. Az $f(x)$ zérushelye $x=3$, a $g(x)$ zérushelye pedig $x=-2$ helyen van. Mindkét függvény szigorúan monoton nő.

A keresett megoldás: $x\le -2$ vagy $x\ge 3$.

b) Az $\dfrac{(x-4)\cdot(x+1)}{(2-x)\cdot(x-1)}\le 0$ egyenlőtlenségnek akkor van értelme, ha $x\ne 1$ és $x\ne 2$.

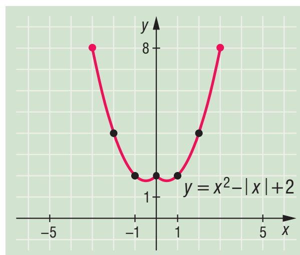


Legyen $f(x)=x-4$ és $g(x)=x+1$. Az $f(x)$ zérushelye $x=4$, a $g(x)$ zérushelye pedig $x=-1$ helyen van. Mindkét függvény szigorúan monoton nő.

Legyen $h(x)=2-x$ és $i(x)=x-1$. A $h(x)$ zérushelye $x=2$, az $i(x)$ zérushelye pedig $x=1$ helyen van. $h(x)$ szigorúan monoton csökken, $i(x)$ szigorúan monoton nő.

A keresett megoldás: $x\le 1$ vagy $1<x<2$ vagy $x\ge 4$.

1219 Az f függvény páros, így grafikonja szimmetrikus az y tengelyre. Ha $x\ge 0$, akkor

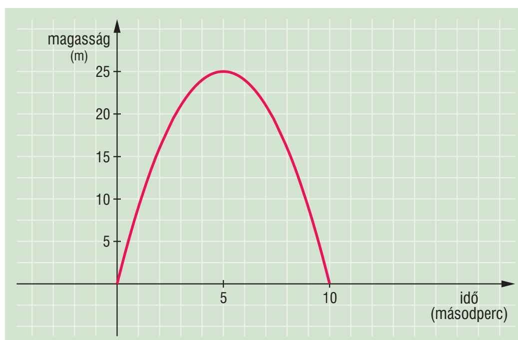


$$f(x)=x^2-x+2=(x-0{,}5)^2+\frac{7}{4},$$

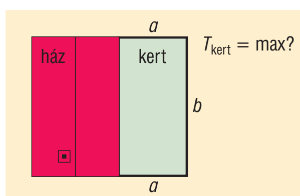
$f(x)\ge 0$ minden $-3\le x\le 3$ esetén teljesül.

1220 Ha $f(x)=ax^2+bx+c$ alakú, akkor a feltételekből $c=1$, $a+b+c=0$, $9a+3b+c=10$. Innen $a=2$, $b=-3$, $c=1$, tehát $f(x)=2x^2-3x+1$.

1221 A labda 10 másodperc múlva esik le, és 5 másodperc múlva jut a legmagasabbra, 25 méterre.



1222 Az ábra jelöléseit felhasználva:



$$48=a+a+b \quad\Rightarrow\quad b=48-2a.$$

A kert területe:

$$T=a\cdot b=a\cdot(48-2a)=48a-2a^2.$$

Ennek keressük a maximumát. Teljes négyzetté alakítás után kapjuk:

$$-2\cdot(a-12)^2+288.$$

Ez akkor maximális, ha csak 288 az értéke, tehát ha $a = 12$, amiből $b = 24$. Ekkor:

$$T_{max} = 12 \cdot 24 = 288 \text{ m}^2.$$

Tehát ahhoz, hogy a kert maximális területű legyen, a téglalap oldalainak $a = 12$ m és $b = 24$ m-nek kell lennie.

1223 *a)* Jelöljük az egyik részt x-szel. Ekkor az $x \cdot (40 - x)$ szorzat maximumát keressük. Alakítsunk teljes négyzetté:

$$x \cdot (40 - x) = -x^2 + 40x = -(x - 20)^2 + 400.$$

Ez akkor maximális, ha csak 400-zal egyenlő, azaz $x = 20$. Ekkor a két rész egyenlő.

b) Jelöljük a számot y-nal, az egyik részt x-szel, ahol $y > x$ és $x, y > 0$. Ekkor az $x \cdot (y - x)$ szorzat maximumát keressük. Alakítsunk teljes négyzetté:

$$x \cdot (y - x) = -x^2 + x \cdot y = -\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{4}.$$

Ez akkor maximális, ha a kifejezés értéke $\frac{y^2}{4}$, vagyis ha $x = \frac{y}{2}$. Ezzel beláttuk a fenti állítást.

1224 Mivel a másodfokú függvénynek maximuma van, $p < 0$. Ekkor a másodfokú függvény képe egy lefelé nyíló parabola, és a csúcspontja, ahol a függvénynek maximuma van, a következő helyen van:

$$-\frac{p^2 - 40{,}5}{2p} = \frac{9}{4}.$$

Ebből $2p^2 + 9p - 81 = 0$, tehát $p_1 = 4{,}5$, vagy $p_2 = -9$. Csak az utóbbi jöhet számításba, ekkor a függvény:

$$f(x) = -9x^2 + 40{,}5x - 12, \quad f\left(\frac{9}{4}\right) = 33{,}5625.$$

1225 Mivel

$$f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10,$$

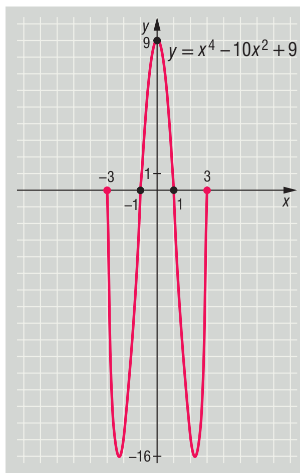
ezért

$$f(-x) = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 - 6x - 10.$$

Így

$$g(x) = 2x^4 - 5x^2 - 10 \quad \text{és} \quad h(x) = -3x^3 + 6x.$$

1226 A függvény grafikonja az ábrán látható.



A függvény páros, mert $f(-x) = f(x)$ az értelmezési tartomány minden elemére. $f(x) = 0$ akkor és csak akkor, ha $|x| = 1$ és $|x| = 3$.

Mivel $f(x) = (x^2 - 5)^2 - 16 \geq -16$, $f(x)$-nek az $|x| = \sqrt{5}$-nél van minimuma, itt $f(\sqrt{5}) = f(-\sqrt{5}) = -16$.

Maximuma: $f(0) = 9$.

1227 Az $f(x)$-et értelmező kifejezést alakítsuk teljes négyzetté:

$$f(x) = (x^2 - 4)^2 - 25.$$

Mivel egy szám négyzete mindig nemnegatív, $f(x) \geq -25$ és itt az egyenlőség csak akkor igaz, ha $x^2 - 4 = 0$, és így $x^2 = 4$-ből $x = 2$, mivel a feladat feltétele szerint $x \geq 0$. Az f függvény a legkisebb értékét tehát a 2 helyen veszi fel, és itt az értéke -25.

A legnagyobb értékét a 3 helyen éri el az f, és $f(3) = 0$.

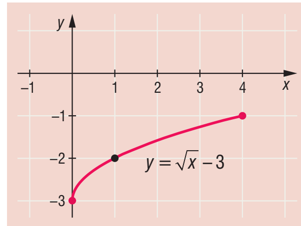
A négyzetgyökfüggvény – megoldások

1228 *a)* Értékkészlete: $[-3; -1]$.

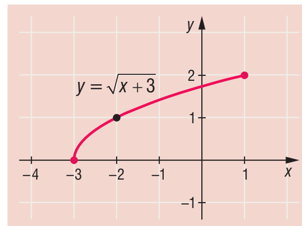
Zérushelye: nincs.

Menete: $[0; 4]$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 0$, értéke: $y = -3$;
maximumának helye: $x = 4$, értéke: $y = -1$.



b) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.

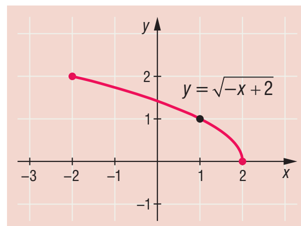


c) Értékkészlete: $[0; 2]$.

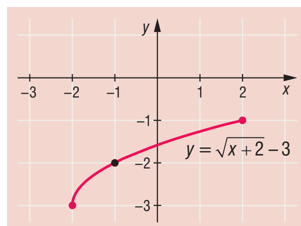
Zérushelye: $x = 2$.

Menete: $[-2; 2]$-ban szigorúan monoton csökken.

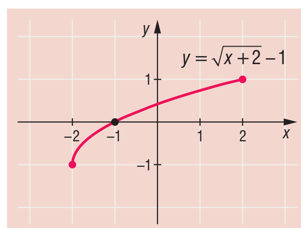
Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 2$.



d) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.



e) Jellemzése az *a)* feladathoz hasonlóan történik.

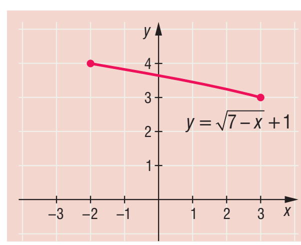


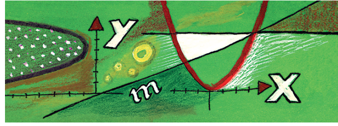
f) Értékkészlete: $[3; 4]$.

Zérushelye: nincs.

Menete: $[-2; 3]$-ban szigorúan monoton csökken.

Szélsőértékei: minimumának helye: $x = 3$, értéke: $y = 3$;
maximumának helye: $x = -2$, értéke: $y = 4$.





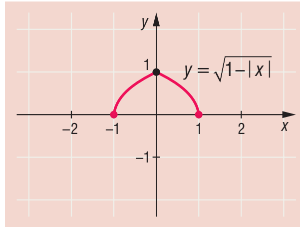
g) Értékkészlete: $[0; 1]$.

Zérushelyei: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.

Menete: $[-1; 0]$-ban szigorúan monoton nő;
$[0; 1]$-ban szigorúan monoton csökken.

Szélsőértékei: minimumai: $x_1 = -1$ helyen értéke: $y_1 = 0$;
$x_2 = 1$ helyen értéke: $y_2 = 0$;
maximumának helye: $x = 0$, értéke: $y = 1$.

Paritása: páros függvény.



h) Az eredeti hozzárendelési szabály átalakítható: $x \mapsto |x^2 - 1|$.

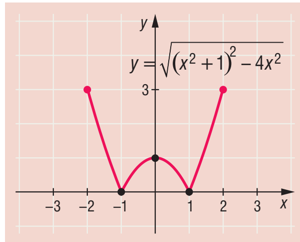
Értékkészlete: $[0; 3]$.

Zérushelyei: $x_1 = -1$ és $x_2 = 1$.

Menete: $[-2; -1]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[-1; 0]$-ban szigorúan monoton nő;
$[0; 1]$-ban szigorúan monoton csökken;
$[1; 2]$-ban szigorúan monoton nő.

Szélsőértékei: minimumai: $x_1 = -1$ helyen értéke: $y_1 = 0$; $x_2 = 1$ helyen értéke: $y_2 = 0$;
maximumai: $x_1 = -2$ helyen értéke: $y_1 = 3$; $x_2 = 2$ helyen értéke: $y_2 = 3$;
helyi maximuma van az $x = 0$ helyen, értéke $y = 1$.

Paritása: páros függvény.



1229 *a)* $x = 2$; *b)* $x = 4$; *c)* $x = 3$;
d) $x = 3$; *e)* $x = 8$.

1230 A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

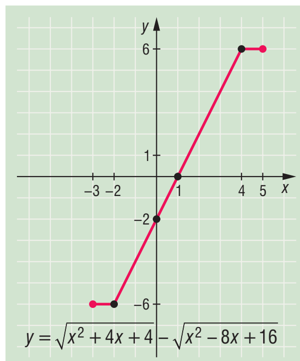
$$y = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - \sqrt{x^2 - 8x + 16} =$$
$$= \sqrt{(x+2)^2} - \sqrt{(x-4)^2} = |x+2| - |x-4|.$$

Értékkészlete: $[-6; 6]$.

Zérushelye: $x = 1$.

Menete: $[-3; -2]$-ban konstans;
$[-2; 4]$-ban szigorúan monoton nő;
$[4; 5]$-ban konstans.

Szélsőértékei: $[-3; -2]$-ban minimuma, értéke: $y = -6$;
$[4; 5]$-ban maximuma, értéke: $y = 6$.

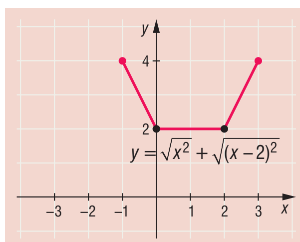


1231 A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

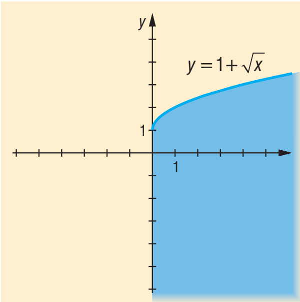
$$y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-2)^2} = |x| + |x-2|.$$

A legkisebb érték a 2, amit a $[0; 2]$-ban vesz fel.

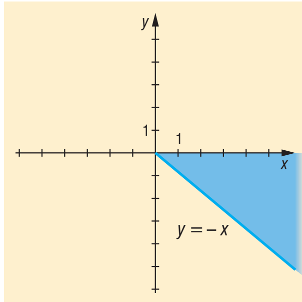
A legnagyobb érték a 4, amit a -1 és a 3 helyen vesz fel.



1232 *a)*



b)



1233 *a)* $x + 1 \geq 0$, azaz $x \geq -1$;

b) $x - x^2 \geq 0$, azaz $0 \leq x \leq 1$;

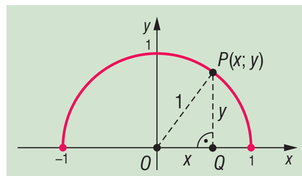
c) $2 + x - x^2 \geq 0$, azaz $-1 \leq x \leq 2$;

d) $-x \geq 0$, azaz $x \leq 0$, és $2 + x > 0$, azaz $x > -2$, tehát $-2 < x \leq 0$.

1234 Pitagorasz tétele alapján az OPQ háromszögből $x^2 + y^2 = 1$, innen (figyelembe véve, hogy $y \geq 0$):

$$y = \sqrt{1 - x^2}.$$

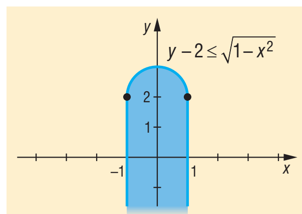
A függvény grafikonja tehát egy 0 középpontú 1 sugarú félkör, ahol a félkör pontjai az $y \geq 0$ félsíkban vannak.



1235 A feltételt írjuk át így:

$$y \leq \sqrt{1 - x^2} + 2.$$

Az 1234. feladat megoldása alapján $-1 \leq x \leq 1$, és így a keresett pontok halmaza az ábrán látható.

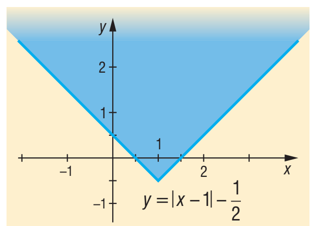


1236 Az adott feltételt így írhatjuk át ekvivalens átalakítással:

$$y + \frac{1}{2} > |x - 1|,$$

$$y > |x - 1| - \frac{1}{2}.$$

A megfelelő pontok halmaza az ábrán látható.

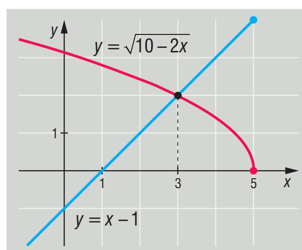


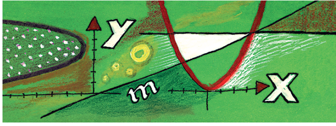
1237 Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben a következő függvényeket:

$$x \mapsto \sqrt{10 - 2x},\ x \leq 5 \quad (1)$$

$$x \mapsto x - 1,\quad x \leq 5 \quad (2)$$

Vegyük észre, hogy mivel a bal oldal csak nemnegatív lehet, ezért a jobb oldal is! Így szükséges még megjegyezni, hogy $x - 1 \geq 0$, azaz $x \geq 1$. Mivel az (1) csökken, a (2) nő, legfeljebb egy gyök van. Az ábráról leolvasható és könnyen ellenőrizhető, hogy $x = 3$ jó gyök.





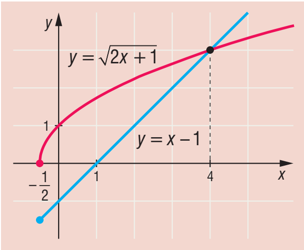
1238 A következő függvényeket ábrázoljuk:

$$x \mapsto \sqrt{2x+1},\ x \geq -\frac{1}{2};$$

$$x \mapsto x-1, \qquad x \geq -\frac{1}{2}.$$

A bal oldal csak nemnegatív lehet, ezért a jobb oldal is: $x \geq 1$.

A függvények tulajdonságai miatt csak $x = 4$ jó gyök.



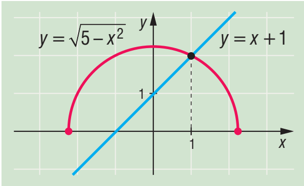
1239 Az alábbi függvényeket ábrázoljuk:

$$x \mapsto \sqrt{5-x^2},\ x^2 \leq 5;$$

$$x \mapsto x+1.$$

A bal oldal csak nemnegatív lehet, ezért a jobb oldal is: $x \geq -1$.

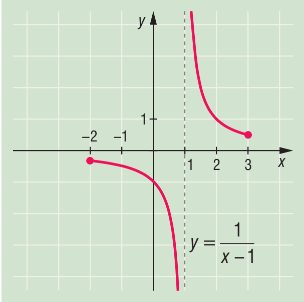
A függvények tulajdonságai miatt csak $x = 1$ az egyetlen jó gyök.



Lineáris törtfüggvények – megoldások

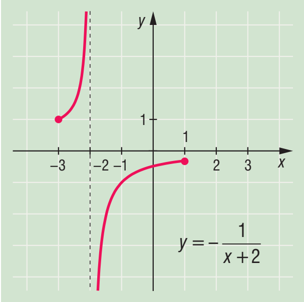
1240 *a)* A $[-2; 1[$-ban és az $]1; 3]$-ban is csökken, nincs sem legnagyobb, sem legkisebb értéke.

Zérushelye nincs.



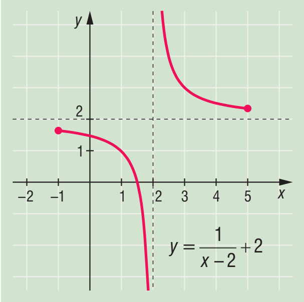
b) A $[-3; -2[$-ban és a $]-2; 1]$-ban is nő, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye nincs.



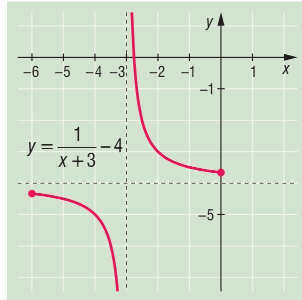
c) A $[-1; 2[$-ban és a $]2; 5]$-ban is csökken, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye: $x = \frac{3}{2}$.



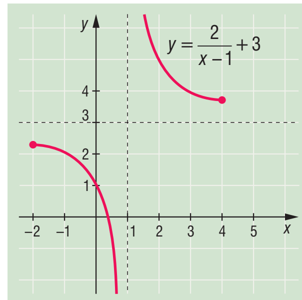
d) A $[-6; -3[$-ban és a $]-3; 0]$-ban is csökken, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

Zérushelye: $x = -\dfrac{11}{4}$.

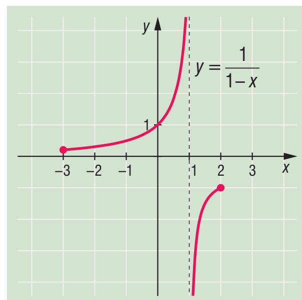


e) A $[-2; 1[$-ban és az $]1; 4]$-ban is csökken, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.

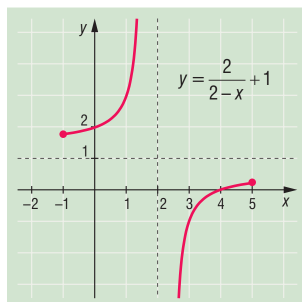
Zérushelye: $x = \dfrac{1}{3}$.



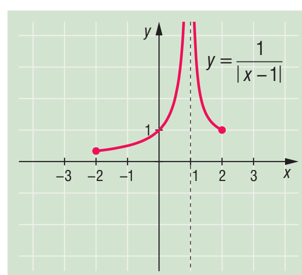
f) A $[-3; 1[$-ban és az $]1; 2]$-ban is nő, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.
Zérushelye nincs.

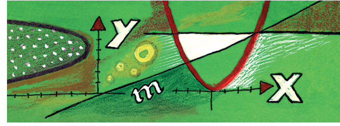


g) A $[-1; 2[$-ban és a $]2; 5]$-ban is nő, nincs sem legkisebb, sem legnagyobb értéke.
Zérushelye: $x = 4$.

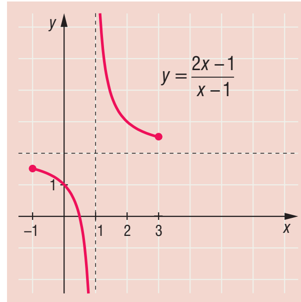


h) A $[-2; 1[$-ban nő, az $]1; 2]$-ban csökken, legnagyobb értéke nincs, legkisebb értéke -2-nél van, és ez $\dfrac{1}{3}$.
Zérushelye nincs.





1241 *a)* A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

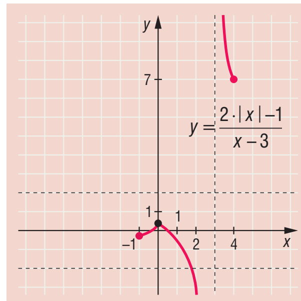


$$y=\frac{2x-1}{x-1}=2+\frac{1}{x-1}.$$

A $[-1;\,1[$-ban és az $]1;\,3]$-ban csökken, nincs legnagyobb és legkisebb értéke sem.

Zérushelye: $x=\frac{1}{2}$.

b) A függvény átalakítható:

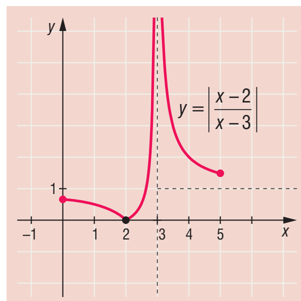


$$\frac{2\cdot|x|-1}{x-3}=\begin{cases}2+\dfrac{5}{x-3}, & \text{ha} \quad x\ge 0,\\[2mm] -2-\dfrac{7}{x-3}, & \text{ha} \quad x<0.\end{cases}$$

A $[-1;\,0]$-ban nő, a $[0;\,3[$-ban és a $]3;\,4]$-ban csökken, nincs legnagyobb és legkisebb értéke.

Zérushelyei: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{1}{2}$.

c) A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:

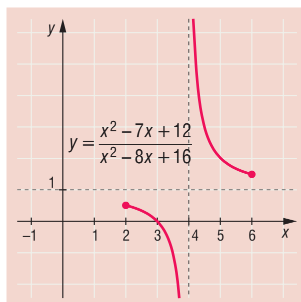


$$y=\left|\frac{x-2}{x-3}\right|=\left|1+\frac{1}{x-3}\right|.$$

A $[0;\,2]$-ban és a $]3;\,5]$-ban csökken, a $[2;\,3[$-ban nő, legkisebb értéke 0, ezt a 2 helyen veszi fel, legnagyobb értéke nincs.

Zérushelye: $x=2$.

d) A függvény hozzárendelési szabálya átalakítható:



$$y=\frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+16}=1+\frac{1}{x-4}.$$

A $[2;\,4[$-ban és a $]4;\,6]$-ban csökken, nincs legnagyobb és legkisebb értéke.

Zérushelye: $x=3$.

1242 *a)* $x>3$ és $-\frac{9}{2}<x<-2$;

b) $x_1=-5$, $x_2=5$;

c) $2<x<6$;

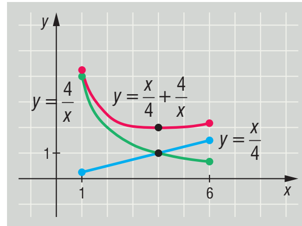
d) $x>-1$.

1243 $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x}$, $x\ne 0, x\ne 1$;

$f(f(f(x)))=x$, $x\ne 0$, $x\ne 1$.

1244 Alakítsuk át így a függvényt értelmező kifejezést:

$$f(x)=\frac{x}{4}+\frac{4}{x},\ 1\le x\le 6.$$

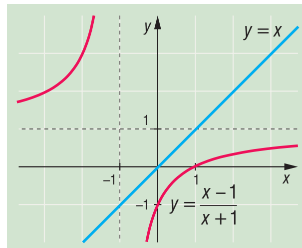


Az $x\mapsto\frac{x}{4}$ és $x\mapsto\frac{4}{x}$ függvények grafikonja segítségével könnyen vázolhatjuk f grafikonját.

Látható, hogy $\frac{x}{4}+\frac{4}{x}\ge 2$, mert $4x>0$-val szorozva és rendezve ezt kapjuk: $x^2-8x+16\ge 0$, azaz $(x-4)^2\ge 0$, ami igaz és a lépések megfordíthatók.

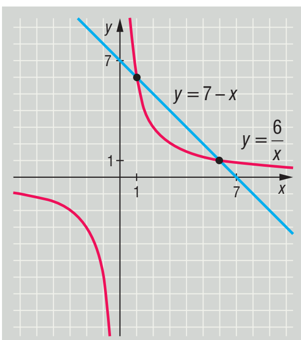
1245 Ábrázoljuk az alábbi függvényeket:

$$x\mapsto\frac{x-1}{x+1}=1-\frac{2}{x+1},\ x\ne -1$$
$$x\mapsto x.$$



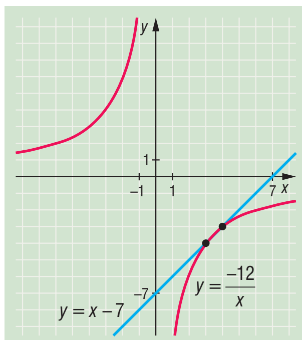
A grafikon alapján világos, hogy $x>-1$ esetén igaz az egyenlőtlenség.

1246 *a)*



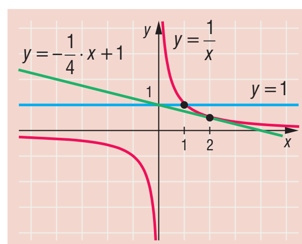
$x_1=1,\ y_1=6;$
$x_2=6,\ y_2=1;$

b)



$x_1=3,\ y_1=-4;$
$x_2=4,\ y_2=-3.$

1247 Két p érték jó: $p=0$ és $p=-\frac{1}{4}$.



1248 Vezessük be a következő jelölést:

$$z=\frac{x}{y}+\frac{y}{x},\quad \text{ekkor}\quad z^2=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+2.$$

Ezzel a kifejezés így írható le:

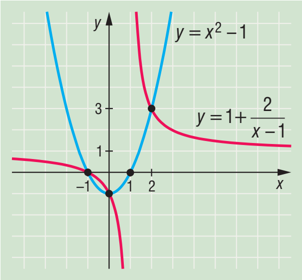
$$4\cdot(z^2-2)-12z+17=4z^2-12z+9=(2z-3)^2\ge 0.$$

1249 Az $f(x) = x^2 - 1$ és a $g(x) = 1 + \dfrac{2}{x-1}$ átalakításokkal könnyű a megfelelő grafikonokat ábrázolni:

a) $f(x) = g(x)$, ha $x = -1, 0, 2$;

b) $f(x) < g(x)$, ha $-1 < x < 0$, vagy $1 < x < 2$;

c) $f(x) > g(x)$, ha $x < -1$, vagy $0 < x < 1$, vagy $x > 2$.



1250 Az egyenletet így is írhatjuk:

$$2 \cdot \left(x^2 - y^2\right)^2 + (2xy - 1)^2 = 0.$$

Mivel $\left(x^2 - y^2\right)^2 \geq 0$ és $(2xy - 1)^2 \geq 0$, az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha

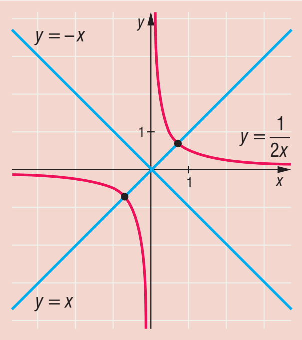
$$x^2 = y^2; \quad (1)$$

$$xy = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Ábrázoljuk a síkon azokat a $P(x; y)$ pontokat, amelyeknek koordinátái kielégítik (1)-et és (2)-t.

A megoldások:

$$x_1 = y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{és} \quad x_2 = y_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$



1251 Adjuk össze a két egyenletet:

$$x^2 + y^2 + 9 - 2xy - 6x + 6y = 0,$$

$$(x - y - 3)^2 = 0,$$

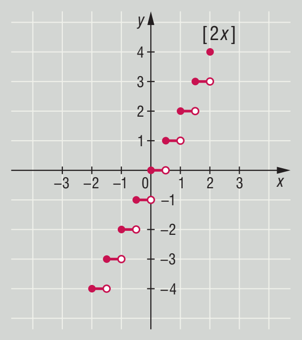
$$y = x - 3.$$

Ezt az első egyenletbe helyettesítve kapjuk: $x^2 = 18$, azaz

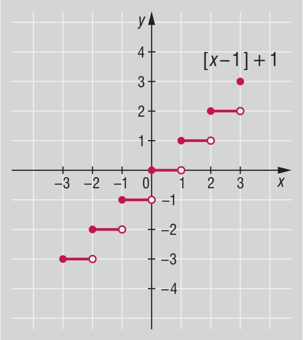
$$x = \pm 3 \cdot \sqrt{2} \quad \text{és} \quad y = \pm 3 \cdot \sqrt{2} - 3.$$

Az egészrész-, a törtrész- és az előjelfüggvény – megoldások

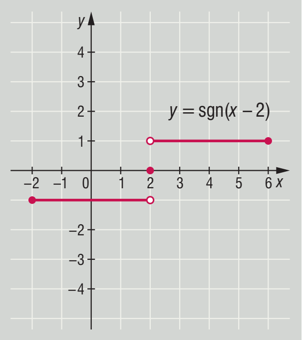
1252 *a)*



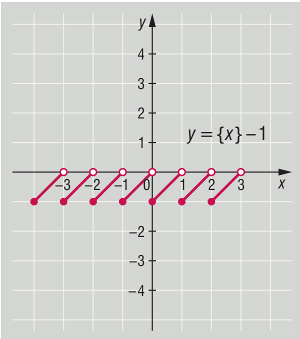
b)



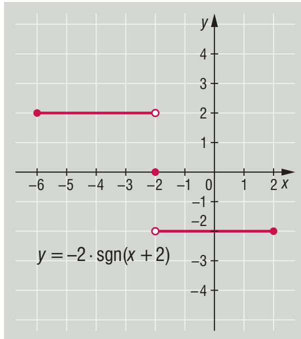
c)



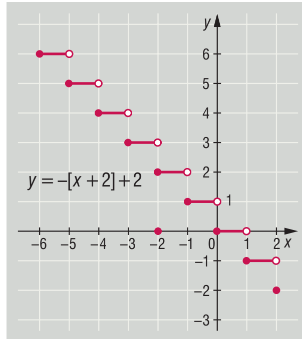
d)



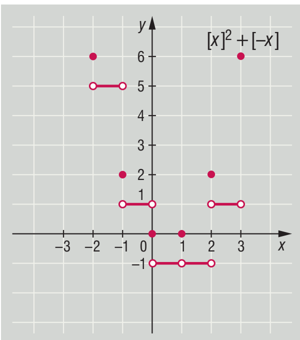
e)



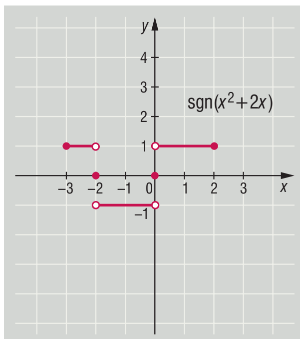
f)



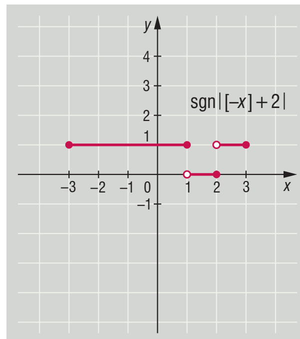
g)



h)



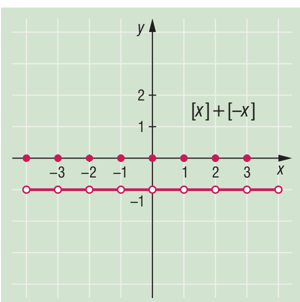
i)



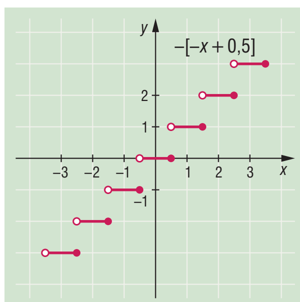
1253 *a)* $n \le x < n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$; *b)* $x \in \mathbb{R}$;

c) $n + \frac{1}{2} \le x < n + 1$, ha $n \in \mathbb{Z}$; *d)* $x \in \mathbb{R}$.

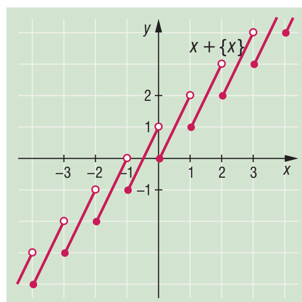
1254 *a)*



b)



c)



Vegyes feladatok – megoldások

1255 *a)* A függvény a $[-3;\,3]$-ban nő; a -3 helyen minimuma van, minimum értéke -4; a 3 helyen maximuma van, maximum értéke 2; zérushelye: $x = -1$.

b) A függvény a $[-3;\,0]$-ban csökken, a $[0;\,3]$-ban nő; a -3 helyen maximuma van, maximum értéke 3; a 0 helyen minimuma van, minimum értéke 0; zérushelye: $x = 0$.

c) A függvény a $[-3;\,1]$-ban nő, az $[1;\,3]$-ban csökken; a -3 helyen minimuma van, minimum értéke -2; az 1 helyen maximuma van, maximum értéke 2; zérushelyei: $x_1 = 0$ és $x_2 = 2$.

d) A függvény a $[-3; -2]$ és $[1; 3]$-ban csökken, a $[-2; 1]$-ban nő; minimuma van a -2 és 3 helyeken, a minimum értéke 0; maximuma van az 1 helyen, maximum értéke 2; zérushelyei: $x_1 = -2$ és $x_2 = 3$.

e) A függvény a $[-3; 1]$ és $[1; 3]$-ban nő, a $[-1; 1]$-ban csökken; az 1 helyen minimuma van, minimum értéke -2; a -1 helyen maximuma van, maximum értéke 4; zérushelyei: $x_1 = -2$ és $x_2 = 0$.

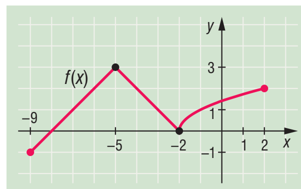
f) A függvény a $[-3; -1]$ és $[0; 1]$-ban nő, a $[-1; 0]$ és $[1; 3]$-ban csökken; a -3 és 3 helyeken minimuma van, minimum értéke -1; a -1 helyen maximuma van, maximum értéke 3; zérushelyei: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 2$.

g) A függvény a $[-3; -2]$ és $[0; 2]$-ban nő, a $[-2; 0]$ és $[2; 3]$-ban csökken; a 0 helyen minimuma van, minimum értéke -1; a 2 helyen maximuma van, maximum értéke 2; zérushelyei: $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ és $x_4 = 3$.

h) A függvény a $[-3; -2]$, $[-1; 1]$ és $[2; 3]$-ban csökken, a $[-2; -1]$ és $[1; 2]$-ban nő; az 1 és 3 helyeken minimuma van, minimum értéke -1; a -3 és -1 helyeken maximuma van, maximum értéke 1; zérushelyei: $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 2$.

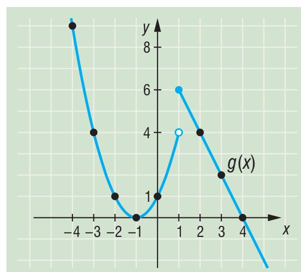
1256 *a)* Az f függvény grafikonja az ábrán látható:

$$f\colon [-9; 2] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} -|x+5|+3, & \text{ha} \quad x < -2, \\ \sqrt{x+2}, & \text{ha} \quad x \geq -2. \end{cases}$$



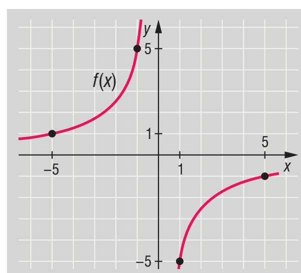
b) A g függvény grafikonja az ábrán látható:

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} 2\cdot(4-x), & \text{ha} \quad x \geq 1, \\ (x+1)^2, & \text{ha} \quad x < 1. \end{cases}$$



1257 *a)* $f\colon x \mapsto \dfrac{-5}{x}$

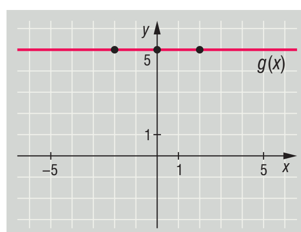
Nincs a koordináta-tengelyekre illeszkedő pontja.



b) $g\colon x \mapsto 5$

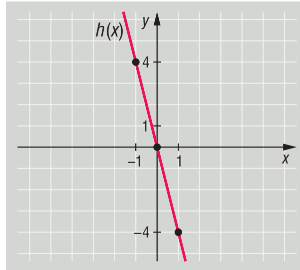
Nincs az x tengelyre illeszkedő pontja. (Mert konstans függvény, és párhuzamos az x tengellyel.)

Az y tengelyre illeszkedő pontja: $(0; 5)$.



c) $h\colon x \mapsto -4x$

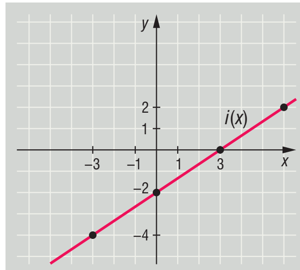
A koordináta-tengelyeket a (0; 0) pontban metszi. Így az x és y tengelyekre illeszkedő pontja: (0; 0).



d) $i\colon x \mapsto \dfrac{2x-6}{3} \quad \Rightarrow \quad x \mapsto \dfrac{2}{3}\cdot x - 2$

Az x tengelyre illeszkedő pontja: (3; 0).

Az y tengelyre illeszkedő pontja: (0; –2).



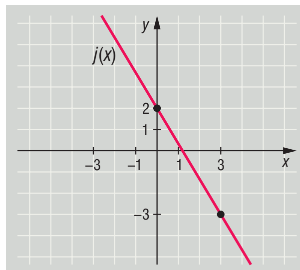
e) $j\colon x \mapsto 2 - \dfrac{5}{3}\cdot x \quad \Rightarrow \quad x \mapsto -\dfrac{5}{3}\cdot x + 2$

Az y tengelyre illeszkedő pontja: (0; 2).

Az x tengelyre illeszkedő pontját számolással határozhatjuk meg. Az $y = 0$ helyen x értéke:

$$y = -\frac{5}{3}\cdot x + 2 \quad \Rightarrow \quad 0 = -\frac{5}{3}\cdot x + 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{6}{5}.$$

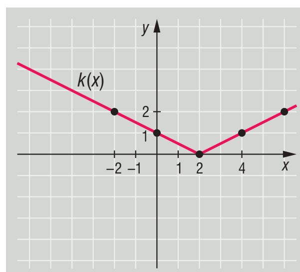
Az x tengelyre illeszkedő pontja: $\left(\dfrac{6}{5};\, 0\right)$.



f) $k\colon x \mapsto \dfrac{1}{2}\cdot |x-2|$

Az x tengelyre illeszkedő pontja: (2; 0).

Az y tengelyre illeszkedő pontja: (0; 1).



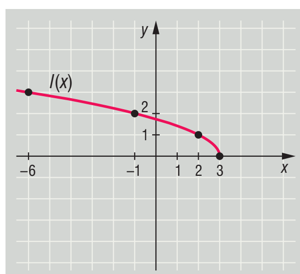
g) $l\colon x \mapsto \sqrt{3-x} \quad \Rightarrow \quad x \mapsto \sqrt{-(x-3)} \quad x \le 3$

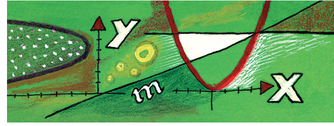
Az x tengelyre illeszkedő pontja: (3; 0).

Az y tengelyre illeszkedő pontját számolással határozhatjuk meg. Az $x = 0$ helyen a függvényérték:

$$y = \sqrt{3-x} \quad \Rightarrow \quad y = \sqrt{3}.$$

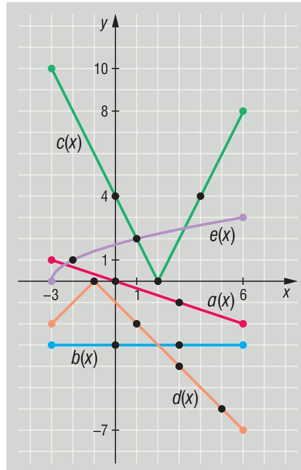
Az y tengelyre illeszkedő pontja: $\left(0;\, \sqrt{3}\right)$.





1258 *a)* $f_1(x)$; *b)* $f_5(x)$; *c)* $f_2(x)$;
d) $f_3(x)$; *e)* $f_4(x)$; *f)* $f_4(x)$;
g) $f_2(x)$, $f_4(x)$; *h)* $f_3(x)$-nek, $(-3; -1)$ pont; *i)* $x = 5$ helyen;
j) $m = 0$, mert konstans; *k)* $f_1(1) = 3$; *l)* igaz.

1259 Az adott intervallumon ábrázolva a függvényeket:



a) $a(x)$ minimumának helye: $x = 6$, értéke: $y = -2$;
maximumának helye: $x = -3$, értéke: $y = 1$.
$a(x) > 0$: $x \in [-3; 0[$-on.

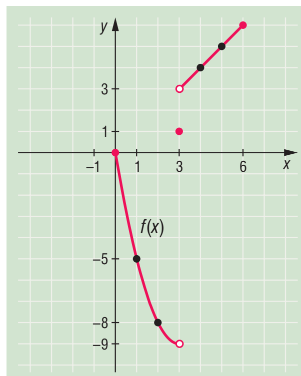
b) $b(x)$-nek nincs szélsőértéke.
$b(x) > 0$: nincs megoldás.

c) $c(x)$ minimumának helye: $x = 2$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = -3$, értéke: $y = 10$.
$c(x) > 0$: $x \in [-3; 6] \setminus \{2\}$.

d) $d(x)$ minimumának helye: $x = 6$, értéke: $y = -7$;
maximumának helye: $x = -1$, értéke: $y = 0$.
$d(x) > 0$: nincs megoldás.

e) $e(x)$ minimumának helye: $x = -3$, értéke: $y = 0$;
maximumának helye: $x = 6$, értéke: $y = 3$.
$e(x) > 0$: $x \in]-3; 6]$-on.

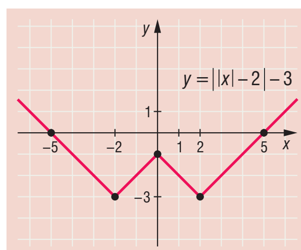
1260 A függvény grafikonja az ábrán látható.



$$f: [0; 6] \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x, & \text{ha} \quad x < 3, \\ 1, & \text{ha} \quad x = 3, \\ x, & \text{ha} \quad x > 3. \end{cases}$$

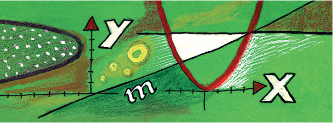
a) A függvény zérushelye: $x = 0$.
b) A függvény negatív, vagyis $f(x) < 0$ a $]0; 3[$-on.
c) A függvény nő a $]3; 6]$-on.

1261 Az ábráról leolvashatók az értékek:



$f(x) = -3$ $x = -2$ és $x = 2$;
$f(x) = -2$ $x = -3$ és $x = -1$ és $x = 1$ és $x = 3$;
$f(x) = -1$ $x = 0$;
$f(x) = 0$ $x = -5$ és $x = 5$;
$f(x) = 1$ $x = -6$ és $x = 6$;

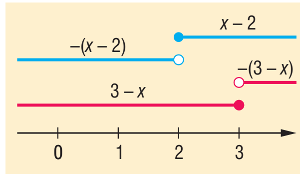
A függvény páros.



1262 Bontsuk fel az $f(x) = |x - 2| - |3 - x|$ függvényünket két függvényre:

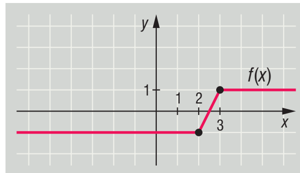
$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{ha } x \geq 2, \\ -(x-2), & \text{ha } x < 2; \end{cases}$$

$$|3-x| = \begin{cases} 3-x, & \text{ha } x \leq 3, \\ -(3-x), & \text{ha } x > 3. \end{cases}$$



Az ábrázolt intervallumok segítségével f átalakítható:

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 2, \\ 2x-5, & \text{ha } 2 \leq x < 3, \\ 1, & \text{ha } x \geq 3. \end{cases}$$



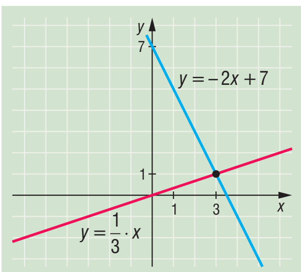
Ezután a kérdések könnyen megválaszolhatók.

a) $f(4) = 1$, $f(2) = -1$, $f(0) = -1$.

b) Az 1 értéket a $[3; \infty[$-ban veszi fel.

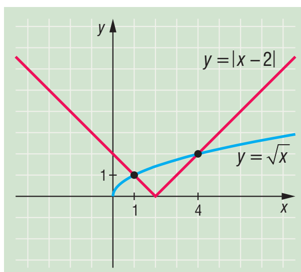
c) Csak a $2x - 5 = 0$ egyenletet kell megoldanunk: $x = \frac{5}{2}$.

1263 *a)*



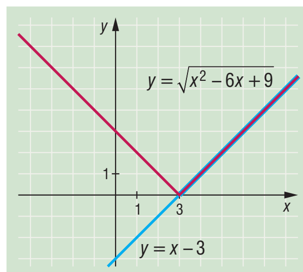
$x = 3$;

b)



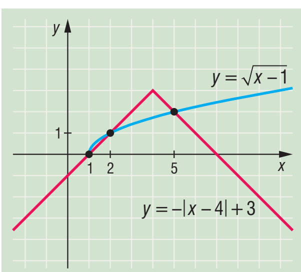
$x_1 = 1$, $x_2 = 4$;

c)



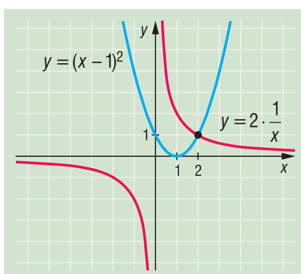
$[3; \infty]$;

d)

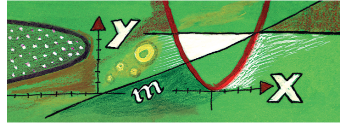


$x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$;

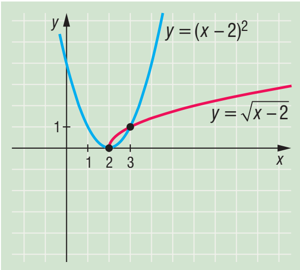
e)



$x = 2$.

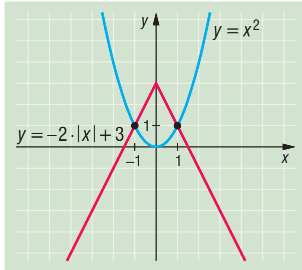


1264 *a)*



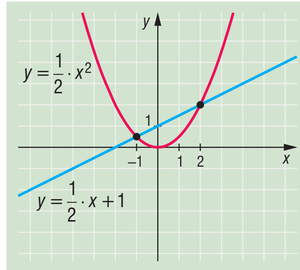
$2 < x < 3$, azaz $]2; 3[$;

b)



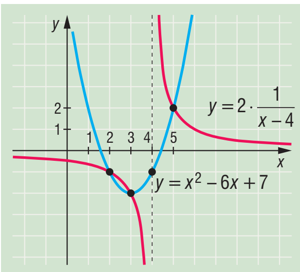
$-1 \le x \le 1$, azaz $[-1; 1]$;

c)



$-1 \le x \le 2$, azaz $[-1; 2]$;

d)



$2 < x < 3$ és $4 < x < 5$,
azaz $]2; 3[\cup]4; 5[$.

1265 Jelöljük x-szel a bontás után keletkező egyik részt, ahol $x \in \mathbb{Z}^+$. Így az $x^2 + (30 - x)^2$ kifejezés minimumát keressük. Végezzük el a négyzetre emelést, és alakítsuk át a kifejezést:

$$x^2 + (30 - x)^2 = x^2 + 900 - 60x + x^2 = 2x^2 - 60x + 900 = 2\cdot(x - 15)^2 + 450.$$

Ez akkor minimális, ha $x = 15$. Tehát a 30-at két egyenlő részre kell osztani.

1266 A két függvény hozzárendelési szabálya:

$$f(x) = x + 1 \quad \text{és} \quad g(x) = -\frac{1}{2}\cdot x + 4.$$

A háromszög magasságát a C pont koordinátáinak segítségével kapjuk meg. C a két függvény metszéspontja:

$$x + 1 = -\frac{1}{2}\cdot x + 4 \;\Rightarrow\; x = 2.$$

Mivel $f(2) = 2 + 1 = 3$, ezért C koordinája $(2; 3)$, amiből a háromszög magassága 3 egység.
A háromszög alapjához meg kell határoznunk az $f(x)$ és a $g(x)$ zérushelyét:

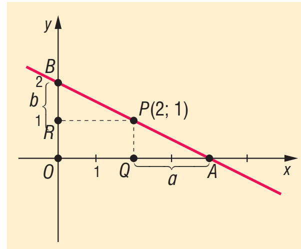
$$f(x) = 0, \quad 0 = x + 1 \;\Rightarrow\; x = -1,$$
$$g(x) = 0, \quad 0 = -\frac{1}{2}\cdot x + 4 \;\Rightarrow\; x = 8.$$

A háromszög alapja tehát $1 + 8$ egység hosszú.
A háromszög területe:

$$T = \frac{a\cdot m}{2} = \frac{9\cdot 3}{2} = \frac{27}{2} = 13{,}5 \text{ egység.}$$

1267 $x + x^2 = (x + 0{,}5)^2 - 0{,}25 \ge -0{,}25, \quad x = -0{,}5.$

1268 Az OAB háromszög területére felírható:



$$T_{OAB\triangle} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{(2+a)\cdot(1+b)}{2}.$$

Mivel $QAP\triangle \sim RPB\triangle$, ezért:

$$\frac{QA}{PQ} = \frac{RP}{RB} \quad\Rightarrow\quad \frac{a}{1} = \frac{2}{b} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{2}{b}.$$

Visszahelyettesítve a területre kapott kifejezésbe:

$$T_{OAB\triangle} = \frac{1}{2}\cdot\left(2+\frac{2}{b}\right)\cdot(1+b) = \frac{1}{2}\cdot\left(2+2b+\frac{2}{b}+2\right) = 1+b+\frac{1}{b}+1 = 2+b+\frac{1}{b}.$$

Ekkor keressük a $2+b+\frac{1}{b}$ minimumát, ahol $b>0$. Mivel $b+\frac{1}{b} \geq 2$, ennek legkisebb értéke 2. Így a $2+b+\frac{1}{b}$ akkor minimális, ha $b=1$ és $a=2$. Ekkor a terület:

$$T_{OAB\triangle} = \frac{OA\cdot OB}{2} = \frac{4\cdot 2}{2} = 4.$$

A és B koordinátája: $A(4;\,0)$ és $B(0;\,2)$, a megfelelő egyenes egyenlete: $y = -\frac{1}{2}\cdot x + 2.$

1269 $f(x-1) = x^2$, $f(x+1) = f\big((x+2)-1\big) = (x+2)^2$, $x \in \mathbb{R}$.

1270 $f_n(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$, $x \in \mathbb{R}$.

1271 *a)* $f(x) = (x-1)^2 - 3\cdot(x-1) + 2 = x^2 - 5x + 6;$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{1+\dfrac{1}{x}};$

c) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right) = \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2 - 2,\ f(x) = x^2 - 2.$

1272 *a)* $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2},\ x \in \mathbb{R};$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x},\ x \geq 0;$

c) $f^{-1}(x) = -\sqrt{x},\ x \geq 0;$

d) $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{1+x},\ x \neq -1;$

e) $f^{-1}(x) = -\sqrt{1-x^2},\ x \in [0;\,1];$

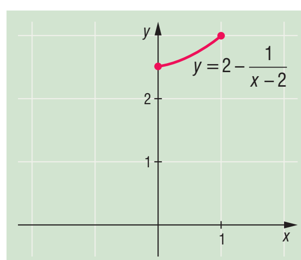
f) $f^{-1}(x) = \sqrt{1-x^2},\ x \in [0;\,1].$

1273 *a)* A függvénynek legnagyobb értéke nincs, legkisebb értéke 2, ezt az $[1;\,3]$ intervallumban veszi fel.

b) Ábrázoljuk a függvényt:

$$x \mapsto \frac{2x-5}{x-2} = 2 - \frac{1}{x-2},\ 0 \leq x \leq 1.$$

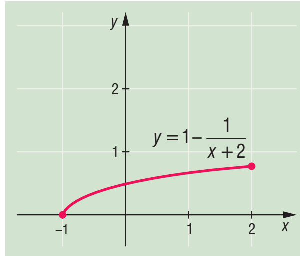
A függvény nő. Minimuma a 0 helyen 2,5, maximuma pedig az 1 helyen van, értéke 3.



c) Ábrázoljuk a függvényt:

$$x \mapsto \frac{x+1}{x+2} = 1 - \frac{1}{x+2}, \ -1 \le x \le 2.$$

A függvény nő, minimuma a -1 helyen 0, maximuma pedig a 2 helyen van, értéke 0,75.



1274 Gyöktelenítsük a számlálót és egyszerűsítsük:

$$\frac{2x}{1+\sqrt{1-4x^2}} \le 1.$$

Ha $-\frac{1}{2} \le x < 0$, akkor a bal oldal negatív, tehát az egyenlőtlenség igaz.

Ha $0 < x \le \frac{1}{2}$, a számláló a bal oldalon nem nagyobb 1-nél, a nevező nagyobb vagy egyenlő, mint 1, így az egyenlőtlenség igaz.

1275 Már igazoltuk, hogy mivel $x^2 > 0$, $x \ne 0$, $\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) \ge 2$, és csak akkor igaz az egyenlőség, ha $x^2 = 1$, azaz $x = 1$, vagy $x = -1$. Innen

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2 + 1 \ge 4 + 1 = 5,$$

és csak $x = 1$, vagy $x = -1$ esetén lesz igaz az egyenlőség.

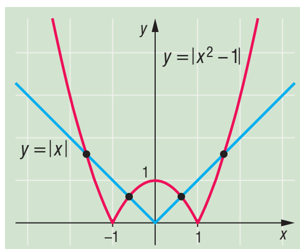
Mivel $y^2 \ge 0$, $1 + y^2 \ge 1$, így $\frac{5}{1+y^2} \le 5$, és az egyenlőség csak akkor igaz, ha $y = 0$.

Tehát az egyenlet megoldásai az $x = 1$, $y = 0$, és az $x = -1$, $y = 0$ számpárok.

1276 Ábrázoljuk egy koordináta-rendszerben az alábbi függvényeket:

$$x \mapsto |x^2 - 1| \quad \text{és} \quad x \mapsto |x|.$$

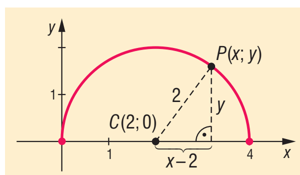
A függvények tulajdonságai alapján látható, hogy az egyenletnek 4 gyöke van.



1277 *a)* Pitagorasz tétele alapján a grafikon tetszőleges $P(x; y)$ pontjának távolsága a $C(2; 0)$ ponttól:

$$PC = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{y^2 + 4 + x^2 - 4x} = 2,$$

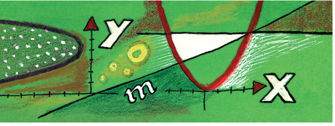
mert $y \ge 0$ és $x^2 - 4x = -y^2$.



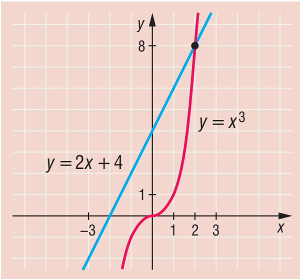
b) Az *a)* feladat eredménye szerint az

$$x \mapsto \sqrt{x \cdot (4-x)} = \sqrt{4x - x^2}, \ 0 \le x \le 4$$

függvény grafikonja az $y \ge 0$, felső félsíkba eső 2 sugarú (2; 0) középpontú félkör. Ennek az x tengelytől legtávolabb lévő pontja a (2; 2) pont. Az x tengelyen a félkör két végpontja van: (0; 0) és (4; 0). Tehát a függvény legnagyobb értéke 2, legkisebb értéke 0.

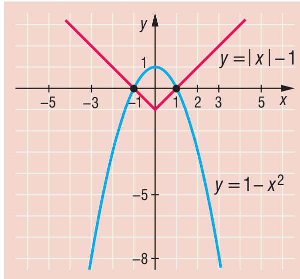


1278 *a)*



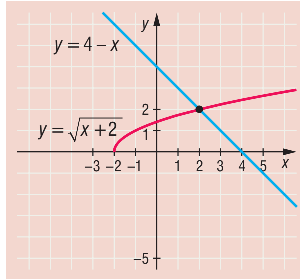
megoldás: $x = 2$;

b)



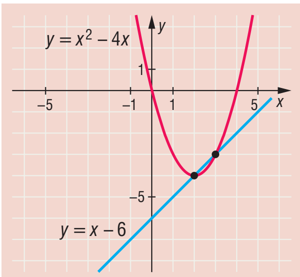
megoldások: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$;

c)



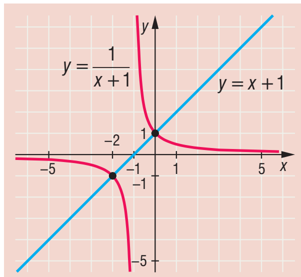
megoldás: $x = 2$;

d)



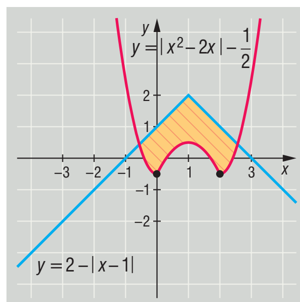
megoldások: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$;

e)



megoldások: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$;
(elég az $\dfrac{1}{x+1} = x + 1$
egyenletet vizsgálni).

1279 Az ábrán vonalazással jelöltük azt a tartományt, amelyben lévő pontok koordinátáira mindkét egyenlőség teljesül. (A határvonal nem tartozik hozzá.)



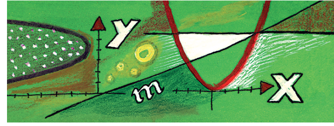
1280 *a)* $f(-x) = \sqrt{1 - x + x^2} - \sqrt{1 + x + x^2} = -f(x)$, tehát f páratlan függvény.

b) $f(-x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2} = f(x)$, tehát f páros függvény.

c) $f(-x) = f(x)$, tehát f páros függvény.

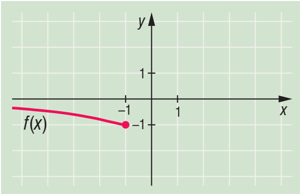
d) f se nem páros, se nem páratlan.

e) f páratlan függvény.

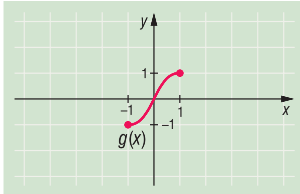


1281 A megadott függvények grafikonja:

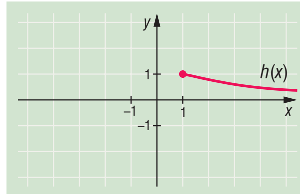
a)



b)



c)



A megfelelő inverz függvények:

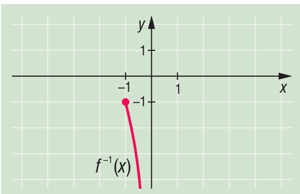
$f^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\in[-1;0[$;

$g^{-1}(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$, $x\in[-1;1]$;

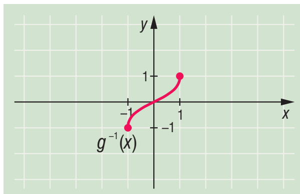
$h^{-1}(x)=\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$, $x\in]0;1[$.

Az inverz függvények grafikonja:

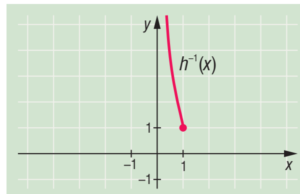
a)



b)



c)



1282 Az f páros függvény, mivel $f(-x)=f(x)$. Elég megmutatni, hogy $[0;+\infty[$-ban korlátos a függvény. Ha $x\ge 1$, akkor $x^2\le x^4$, ezért

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}\le 1.$$

Ha $0\le x\le 1$, akkor $x^2\le 1$, és mivel $1+x^4\ge 1$, így

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}\le 1+x^2\le 2.$$

Tehát f az egész számegyenesen korlátos.